



## Clasa a XII-a, Soluții și barem

**Problema 1.** Pe mulțimea  $\mathbb{R}^+$  a numerelor reale mai mari sau egale cu zero considerăm operația  $*$ , care are proprietatea că este comutativă și asociativă și pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}$  avem

$$x * y * z = x + y + z + xy + yz + zx + xyz.$$

Determinați legea și arătați că  $(\mathbb{R}^+, *)$  este monoid.

G. René

*Soluție și barem.* Avem  $x * y * 0 = x + y + xy$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}^+$ . De aici reiese  $x * 0 * 0 = x$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}^+$ . ..... **6p**

Pe de altă parte  $x * y * 0 * 0 * 0 = x + y + xy = (x * 0) + (y * 0) + (x * 0)(y * 0)$  ..... **6p**

De aici  $0 = 2(0 * 0) + (0 * 0)^2$ , de unde  $0 * 0 = 0$  sau  $0 * 0 = -2$ , al doilea caz nefiind posibil. .... **6p**

Rezultă că 0 e element neutru deci  $x * y = x * y * 0 = x + y + xy$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}^+$  ..... **3p**

**Problema 2.** Fie  $A$  un inel finit comutativ cu proprietatea că suma soluțiilor ecuației  $x^2 = 1$  este nenulă.

- Demonstrați că  $1 + 1 = 0$ .
- Demonstrați că ecuația  $x^2 = 1$  are cel mult două soluții distincte.
- Dați exemplu de inel în care ecuația de mai sus are două soluții distincte.

Cristi Săvescu

*Soluție și barem.* a) Fie  $M = \{x \in A \mid x^2 = 1\}$ . Dacă  $x \in M$  atunci  $-x \in M$  și  $x$  este inversabil. .... **3p**

Dacă nu există  $x \in M$  cu  $x = -x$ , putem grupa soluțiile ecuației în perechi  $(x, -x)$ . Suma soluțiilor ecuației va fi atunci zero – contradicție. Deci există  $x \in M$  cu  $x = -x$  și, cum  $x$  este inversabil, avem  $1 = -1$ . .... **3p**

b) Din comutativitate  $x, y \in M$  implică  $(xy)^2 = x^2 y^2 = 1$  deci  $xy \in M$ . Așadar  $M$  este grup finit. Cum orice element din  $M$  este fie 1, fie de ordin 2 deducem  $\text{card } M = 2^p$ , cu  $p \in \mathbb{N}$ . Dacă  $p = 0$  concluzia este evidentă. Pentru  $p \geq 1$  fie  $a \in M$   $a \neq 1$ . Avem  $1 + a \neq 0$ ,  $(1 + a)^2 = 1 + 1 = 0$ . .... **6p**

Pentru  $x \in M$ , avem  $(x + a + 1)^2 = x^2 + (a + 1)^2 = 1$  deci  $x + a + 1 \in M$  și, cum  $x \neq x + a + 1$ , putem grupa elementele din  $M$  în perechi  $(x, x + a + 1)$ , suma fiecărei perechi fiind  $2x + a + 1 = a + 1$ . Suma elementelor din  $M$  este atunci  $2^{p-1}(a - 1) \neq 0$ , deci  $2^{p-1}$  este impar, deci  $p = 1$  și  $\text{card } M \leq 2$  ..... **6p**

c) Inelul  $A = \{0, 1, a, a + 1\}$ , cu  $2 = 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $a^2 = 0$  satisface condițiile date. **3p**

**Problema 3.** Fie  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă, cu derivata continuă. Arătați că

$$\max f^2 \leq 3 \int_0^1 f^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

\*\*\*

*Soluție și barem.* Pentru  $x, t \in [0, 1]$  avem

$$f^2(x) = f^2(t) + \int_t^x 2f(u)f'(u) du. \quad \text{.....} \mathbf{3p}$$

De aici  $f^2(x) \leq f^2(t) + \int_0^1 2|f(u)f'(u)|du \dots\dots\dots$  **6p**

Integrând după  $t$ ,  $f^2(x) \leq \int_0^1 f^2(t)dt + 2 \int_0^1 |f(t)||f'(t)|dt \dots\dots\dots$  **3p**

Din inegalitatea mediilor avem  $2|f(t)||f'(t)| \leq 2f^2(t) + \frac{1}{2}|f'^2(t)|$  pentru  $t \in [0, 1]$ .  
Atunci, pentru orice  $x \in [0, 1]$  avem

$$f^2(x) \leq \int_0^1 f^2(t)dt + 2 \int_0^1 f^2(x)dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f'^2(x)dx$$

de unde concluzia. .... **9p**

**Problema 4.** Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{n^2 + n + k^2}{n^2 + k^2}.$$

*G. René*

*Soluție și barem.* Notăm cu  $a_n$  produsul din enunț. Atunci

$$\ln a_n = \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{n}{n^2 + k^2} \right),$$

logaritmul fiind bine-definit..... **3p**

Cum  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ , pentru  $\varepsilon > 0$  există  $\delta > 0$ , astfel ca pentru  $|x| \leq \delta$  să  
avem  $x(1-\varepsilon) \leq \ln(1+x) \leq x(1+\varepsilon)$ ..... **6p**

Rezultă că pentru  $1/n \leq \delta$ , avem, cu notația  $x_n = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}}$

$$(1-\varepsilon)x_n \leq \ln(1+x_n) \leq (1+\varepsilon)x_n,$$

deci

$$(1-\varepsilon) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} \leq \ln a_n \leq (1+\varepsilon) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}}.$$

..... **6p**

Cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4},$$

deducem

$$(1-\varepsilon) \frac{\pi}{4} \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq (1+\varepsilon) \frac{\pi}{4}.$$

..... **3p**

Deoarece  $\varepsilon$  este arbitrar, deducem că limita există și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \frac{\pi}{4}$ , de unde  
reiese  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{\pi}{4}}$  ..... **3p**